26/10/2020

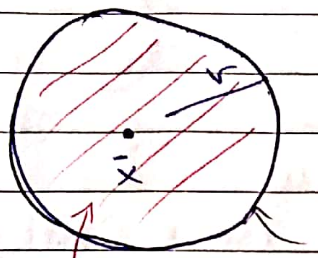
Παρατήρηση: Το σύνορο ενός συνόλου $U \subseteq \mathbb{R}^n$ μπορεί να ανήκει (ή μέρη αυτού) ή όχι σ' ένα σύνολο.

π.χ.

η ανοικτή και κλειστή μπάλα έχουν και οι δύο ως σύνορο τη σφαίρα

Στην $1^{η}$ περ. η σφαίρα $\subset$ συμπληρώματος ανοικτής μπάλας

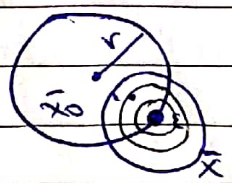
-//- $2^{η}$ -//- -//- $\subset$ κλειστής μπάλας



$B(\bar{x}, r) \cup \partial B(\bar{x}, r) = \bar{B}(\bar{x}, r)$

κάθε σημείο $\bar{y}$ με $\|\bar{x}-\bar{y}\| = r$ δεν ανήκει ούτε στην ανοικτή μπάλα ούτε στο συμπλήρωμα κλειστής μπάλας

Εκτός από ανοικτό, κλειστό, φραγμένο, συμπαγές, εσωτερικό, εξωτερικό σύνορο, κλειστή θήκη [ορισμοί] υπάρχουν και οι έννοιες μεμονωμένο σημείο ενός $U \subset \mathbb{R}^n$. π.χ. έστω $U = B(\bar{0},1) \cup \{\bar{x}\}$, όπου $\|\bar{x}\| \geq 2$ $\Rightarrow$ το $\bar{x}$ είναι μεμ. σημείο του U, αφού $\forall\, \varepsilon \in (0,1)$ $U \cap B(\bar{x},\varepsilon) = \{\bar{x}\}$ [Απόδειξη: ΑΣΚΗΣΗ] ενώ κάθε $\bar{y} \in \partial B(\bar{0},1)$ είναι σ.σ.



$\bar{x} \in \partial B(\bar{x}_0, r)$

$\bar{x} \in (B(\bar{x}_0,r))'$ δηλ. είναι σ.σ. του $B(\bar{x}_0,r)$ $\Leftrightarrow$ μπορώ να πλησιάσω το $\bar{x}$

$\bar{v} \neq u$ [που δεν ανήκει στο U, εδώ!]

με σημεία από το U και μάλιστα όσο πιο κοντά θέλω.

αποδ. προτ. 1.3.6, c:

Ν.δ.ο: $\underbrace{\mathbb{R}^n \setminus (U \cup U')}_{= (\mathbb{R}^n \setminus U) \cap (\mathbb{R}^n \setminus U')} \subset \mathbb{R}^n \setminus \bar{U}$

Έστω $\bar{x} \in (\mathbb{R}^n \setminus U) \cap (\mathbb{R}^n \setminus U') \iff$ δηλ. $\bar{x} \in \mathbb{R}^n \setminus U$ και δεν είναι σημείο συσσώρευσης.

$\Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0 : \underbrace{U \cap B(\bar{x}, \varepsilon) \setminus \{\bar{x}\}}_{= U \cap B(\bar{x}, \varepsilon) \text{ [αφού } \bar{x} \notin U]} = \emptyset$

Εδώ:

$\Rightarrow U \subset \mathbb{R}^n \setminus B(\bar{x}, \varepsilon)$: κλειστό $\Rightarrow \bar{U} \subset \mathbb{R}^n \setminus B(\bar{x}, \varepsilon) \Rightarrow$

$\Rightarrow B(\bar{x}, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^n \setminus \bar{U} \Rightarrow \bar{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{U}$

Σχόλιο: Για κλειστή θήκη $\bar{U}$ ενός (οποιουδήποτε) Χαρακτηρίζεται η $\bar{U}$ από 4 ισοδύναμες ιδιότητες

α) Ορισμός: $\bar{U} = \bigcap_{K \in \mathcal{K}} K$, όπου $K \in \mathcal{K} \iff K$ κλειστό, $K \supset U$

β) Το $\bar{U}$ είναι το μικρότερο δυνατό κλειστό σύνολο που περιέχει το U

γ) $\bar{U} = U \cup U'$, U' = τα σημεία συσσώρευσης του U

δ) $\bar{U} = \underbrace{\text{int}\, U}_{\text{εσωτ. του } U} \cup \underbrace{\text{bd}\, U}_{\text{σύνορο του } U} = \mathring{U} \cup \partial U$